**Unidad 4: Vectores geométricos en IR2 y en IR3**

**Parte A: Los vectores geométricos del plano y del espacio**

* **Cuplas puntuales**

Consideramos P al conjunto de puntos del plano. Una cupla puntual (a,b) es un par ordenado de puntos del plano P, es decir: (a,b) ϵ PXP

a es el *origen* de la cupla

b es el *extremo* de la cupla

b

a

Toda cupla puntual determina una recta del plano denominada *recta sostén*. D es la recta sostén de la cupla (a,b).

D

b

a

Cupla nula

Es la cupla que posee su origen y extremo en el mismo punto, es decir: (a, a)

a

Cuplas alineadas

Se refiere a cuplas que poseen la misma recta sostén.

a b c d

Cuplas consecutivas

Se refiere a cuplas en las cuales el extremo de una coincide con el origen de la otra.

a b = c d

b

a d

Cuplas iguales

Dos cuplas puntuales son iguales cuando sus respectivos orígenes son iguales y sus extremos también.

(a, b) = (c, d) ⇔ (a = c ∧ b = d)

a = c b = d

* **Equipolencia de cuplas puntuales**

1º caso: Cuplas puntuales no alineadas y no nulas.

a b

c d

Dos cuplas no alineadas y no nulas son equipolentes cuando al conectarse sus orígenes entre sí y sus extremos entre sí, determinan un paralelogramo. Es decir: (a,b) ~ (c,d) si y solo si abdc es un paralelogramo.

Contraejemplo: (x,y) ~ (z,t), ya que no forman un paralelogramo.

x y

t z

2º caso: Cuplas puntuales no nulas y alineadas.

a b c d

e f

Dos cuplas puntuales no nulas y alineadas son equipolentes cuando se pueden conectar mediante dos paralelogramos: (a,b) ~ (c,d)

3º caso: Cuplas puntuales nulas.

Las cuplas nulas son equipolentes entre sí, (a,a) ~ (b,b)

a b

4º caso: Cuplas puntuales iguales.

Las cuplas iguales son equipolentes, (a,b) = (c,d) , si y solo si (a,b) ~ (c,d)

a = c b = d

*Ejercicio 1*

*Sea la cupla (a,b) y los puntos d y e del plano puntual P. Encontrar los puntos f y g tal que se verifique: (a,b)~ (d,f) y (e,g) ~ (a,b).*

*d•*

*a •*

*b • e*

*Ejercicio 2*

*Construir tres cuplas equipolentes a la cupla (a,b), cuyos orígenes sean los puntos c, d y e respectivamente:*

c a b

d e

* **Relación de equipolencia**

Se considera la relación de equipolencia R, definida entre las cuplas puntuales de P2, esta relación verifica las siguientes propiedades:

Reflexiva

Toda cupla es equipolente a sí misma, es decir: (a,b) ~ ( a,b), para toda cupla (a, b) de P2.

Simétrica

(a,b) ~ ( c,d) ⇒ (c,d) ~ ( a,b), para todo par de cuplas (a, b) y (c, d) de P2.

Transitiva

[(a,b) ~ ( c,d) ∧ (c,d) ~ ( e,f)] ⇒ (a,b) ~ ( e,f), para toda terna de cuplas (a, b), (c, d) y (e, f) de P2.

Por lo tanto, la relación de equipolencia definida en P2 es una **relación de equivalencia**, y toda relación de equivalencia determina clases de equivalencia. Cada una de estas clases se denomina VECTOR LIBRE del plano P2.

Es decir, la clase de equivalencia del vector (a,b) se expresa:

[(a,b)] = { (x,y): (x,y) ~ (a,b)}, siendo (a,b) su vector representante.

Luego, anotamos a cada vector libre: [(a,b)] = [] = ]

Se denomina VL2 al conjunto de todos los vectores libres del plano.

Adición en VL2

En VL2 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: VL2 X VL2→ VL2

(],]) →]+]= ]

*Ejercicio 3*

*Si los vectores libres ] y] son los de la figura, construir gráficamente el vector suma]+] en cada una de las siguientes situaciones:*

a)

] ] b) ]

]

Multiplicación por un escalar en VL2

La multiplicación externa en VL2 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X VL2 → VL2

(k,]) →k•]= ]

*Ejercicio 4*

*A partir del vector libre [(a,b)] de la figura construir:*

*a) 3****.****[(a,b)]*

*b) 2/3****.****[(a,b)] b*

*c)-4/5****.****[(a,b)]*

*a*

*Ejercicio 5*

*Se tienen los vectores libres ] y] de la figura, en forma gráfica encontrar: 1/2.]+4.]*

]

]

* **Vectores fijos del plano**

En el plano P se fija un punto o, y se consideran todas las cuplas con origen en ese punto.

O• a

c

b

(o, a) =  (o,b) =  (o, c) = 

Cada cupla puntual (o, a) =  es un vector FIJO, y al conjunto de todos los vectores fijos del plano de origen en el punto o, se lo denomina Vo,2.

Adición en Vo,2

En Vo,2 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,2 X Vo,2 → Vo,2

(,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+

1º caso: Cuplas puntuales no alineadas y no nulas.

o a

b c += 

2º caso: Cuplas puntuales alineadas de igual sentido.

o a b c

+= 

3º caso: Cuplas puntuales alineadas y de distinto sentido.

+= 

a c o b

*Ejercicio 6*

*En Vo,2  construir gráficamente el vector suma + en cada una de las siguientes situaciones:*

a) b) o a b

a

o

o

b c) a • b

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,2

La multiplicación externa en Vo,2 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,2 → Vo,2

(k, ) →k • =

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k• 

Si k = 1, entonces k •= 1. = 

Si k = -1, entonces k• = (-1). = - , denominado vector opuesto de .

- 

b o a

Si k = 2, entonces k •= 2. 

2. 

o a b

*Ejercicio 7*

*Se tienen los vectores fijos  y  de la figura, en forma gráfica encontrar:*

1. *3 .*
2. ½.
3. *= 3 .* + ½.

a

o

b

* **Vectores fijos del espacio tridimensional**

Se considera al conjunto Vo,3, que es el conjunto de todas las cuplas puntuales del espacio tridimensional con origen en o.

Adición en Vo,3

En Vo,3 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,3 X Vo,3 → Vo,3

(,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,3

La multiplicación externa en Vo,3 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,3 → Vo,3

(k, ) →k • = 

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k•

De similar forma se puede extender a Vo,n, que es el conjunto de todos los vectores fijos del espacio n-dimensional.

Adición en Vo,n

En Vo,n , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,n X Vo,n → Vo,n

(,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+.

Propiedades de la suma en Vo,n

* Asociativa

(+) += +(+ ), siendo , y  vectores de Vo,n

* Conmutativa

+= +, siendo  y  vectores de Vo,n

* Elemento neutro

Existe el vector nulo de Vo,n, tal que para todo vector de Vo,n, se verifica que:

+= += 

* Elemento opuesto

Para todo vector de Vo,n, existe su vector opuesto -  de Vo,n, tal que:

+ (-)= (-)+= 

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,n

La multiplicación externa en Vo,n es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,n → Vo,n

(k, ) →k • =

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k• 

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de Vo,n

|  |
| --- |
| Siendo  y  vectores de Vo,n, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:   * t.( +)= t.  + t. * ( t+k) . = t. + k. * (t.k).  = t.(k. ) * 1. = |
| Nota: el producto de un número real t por un vector v es un nuevo vector t.v, que tiene la misma dirección que v, el mismo sentido que v si t > 0, o sentido opuesto si t < 0. |

* **Componentes y coordenadas de un vector de IR2 y IR3**

En el plano IR x IR = IR2 es posible identificar a cada punto con un par de números reales que son sus coordenadas, por ejemplo considere el punto a = (xa , ya ) . Estascoordenadas permiten representar ese punto en el plano IR2.

IR

ya a

xa IR

Si además del punto a = (xa , ya ) se considera el punto o = ( xo , yo ), las componentes de un vector u = , en el plano IR2 , se determinan como :

u =  = (xa -xo , ya - yo)

De este modo, los vectores del plano quedan asociados de manera única con un par de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y) de IR2.

*Ejercicio 8*

*Representar gráficamente en IR2 los siguientes vectores geométricos:  , donde ,,y , siendo c = (-3,2) y d = (-3,0).*

***a)*** *Determinar las componentes del vector* *.*

***b)*** *Determinar las componentes del vector 4..*

En el espacio IR x IR x IR = IR3 es posible identificar a cada punto con una terna ordenada de números reales, que son sus coordenadas, por ejemplo considere al punto a = (xa , ya , za).

za

a

ya

xa

Si además del punto a = (xa , ya, za ) se considera el punto o = ( xo , yo , zo ), las componentes de un vector u = , en el espacio IR3 , se determinan como :

u =  = (xa -xo , ya - yo,za -zo )

Los vectores del espacio tridimensional quedan asociados de manera única con una terna de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y, z) de IR3.

Si las coordenadas del punto o fueran: o = (0, 0) en el plano IR2, o bien o = (0, 0, 0) en el espacio IR3, las componentes del vector u coincidirían con las coordenadas del punto a, sólo en ese caso.

*Ejercicio 9*

*Representar gráficamente en IR3 los siguientes vectores geométricos:  , donde  y  y , donde  y .*

*a) Determinar las componentes del vector .*

*b) Determinar las componentes del vector 5. .*

En el espacio IR x … x IR = IRn es posible identificar a cada punto con una n-upla ordenada de números reales, que son sus coordenadas, por ejemplo el punto a = (x1 ,x2, … , xn).

Si además del punto a se considera el punto o = ( y1 , y2 ,…, yn ), las componentes de un vector u = , en el espacio IRn , se determinan como :

u =  = (x1 –y1 , x2 – y2,…,xn –yn )

Los vectores del espacio n-dimensional quedan asociados de manera única con una n-upla de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x1, x2 ,…, xn) de IRn.

* **Adición o suma en IR2**

En IR2, la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: IR2 x IR2 → IR2

(u, v) →u+v = w

Se denomina vector suma al vector resultante: w = u+v.

Es decir, si u = (x, y) de IR2 , y v = (x0 ,y0 ) de IR2 , la suma u+v es el vector w de componentes:

w = u+v = (x+x0 ,y+y0 ) (simplemente se suma componente a componente).

Propiedades de la suma en IR2

* Asociativa

(u+v) + w = u + (v+w), siendo u, v y w vectores de IR2

* Conmutativa

u+ v= v + u, siendo u y v vectores de IR2

* Elemento neutro

Existe el vector nulo o = ( 0, 0 ) de IR2, tal que para todo vector u de IR2, se verifica que:

o + u = u + o = u

* Elemento opuesto

Para todo vector u de IR2, existe su vector opuesto – u de IR2, tal que:

u + (- u ) = ( -u ) + u = o

* **Multiplicación de un escalar por un vector de IR2**

La multiplicación externa en IR2 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X IR2 → IR2

(k, u) → k •u =w

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: w= k• u

Dados u = (x, y) de IR2 y λ de IR, el producto λ•u es el vector w de componentes:

w = λ•u = (λx,λy) (se multiplica el número por cada una de las componentes del vector original).

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IR2

|  |
| --- |
| Siendo u y v vectores de IR2, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:   * t• ( u + v)= t • u + t • v * ( t+k) • u= t • u+ k • u * (t.k) • u= t.(k • u) * 1 • u= u |

En general, se pueden definir la suma y el producto por un escalar real en el espacio IRn.

Dados u = (x1,..,xn) de IRn y v = (y1,..,yn) de IRn , la suma u+v es el vector de w componentes:

w = u + v = (x1,...,xn) + (y1,...,yn) (x1 +y1,...,xn +yn)

Dados v = (x1,...,xn) de IRn y λ de IR, el producto λ.v es el vector w de componentes:

w = λ.v = λ.(x1,...,xn) = (λx1,...,λxn)

Propiedades de la suma en IRn

* Asociativa

(u+v) + w= u+(v+w), siendo u,v y w vectores de IRn

* Conmutativa

u+v= v+u, siendo u y v vectores de IRn

* Elemento neutro

Existe el vector nulo o = (0, 0, …, 0) de IRn, tal que para todo vector u de IRn, se verifica que:

u + o = o + u = u

* Elemento opuesto

Para todo vector u de IRn, existe su vector opuesto – u de IRn, tal que:

u + ( - u) = ( - u ) + u = o

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IRn

|  |
| --- |
| Siendo u y v vectores de IRn, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:   * t• ( u + v)= t • u + t • v * ( t+k) • u= t • u+ k • u * (t.k) • u= t.(k • u) * 1 • u= u |

## El conjunto IRn con las operaciones de suma y con la multiplicación por un escalar real, verificando todas las propiedades enunciadas, definen el espacio vectorial IRn (IR).

Nota: el concepto de espacios vectoriales se amplía en 2° año, en Algebra Lineal.

*Ejercicio 10*

*Sean u = (3,2), v = (−1,5) y w = (2,2) vectores de IR2, determinar las componentes de los vectores:*

1. *u + v*

*b) −2u + 2v*

*c)3w + v*

*d) v – w*

*Ejercicio 11*

*Sean u = (3,-2, 4), v = (6,−1,5) y w = (0,2,3) vectores de IR3, determinar las componentes de los vectores:*

1. *u + v*

*b)-4u + 2v*

*c)-3w+v*

*Ejercicio 12*

*Determinar los vectores u y v de IR2, tales que verifican el siguiente sistema:*

**

* **Dependencia e independencia lineal**

Familia de vectores

Un conjunto ordenado de vectores: F = { u1, u2,, ... , um } del espacio vectorial IRn (IR ) se denomina **familia**de vectores.

Combinaciones lineales

Sea el espacio vectorial IRn (IR) y una familia de vectores F = { u1, u2,, ... , um }, se dice que un vector w de IRn es una combinación lineal de los vectores de F, si existen los escalares k1, k2,…., km , tal quew se puede expresar en la forma:

w = k1.u1 + k2.u2 +….+ km.um , en donde k1, k2,…., km son elementos de IR

*Ejercicio 13*

*Determinar en cada caso, si el vector w es una combinación lineal de los vectores de la familia F:*

1. *F = {} y w = *
2. *F = {} y w = *
3. *F = {} y w = *

Si el vector w de V es el vector nulo, entonces la combinación lineal es:

 = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um , denominada combinación trivial.

Familia libre y familia ligada

Si en la combinación trivial  = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um , resulta que todos los escalares son nulos, es decir: k1 = 0 = ... = km = 0 entonces la familia de vectores F = {u1, u2,, ... , um } recibe el nombre de **familia libre.**

En el caso contrario, si al menos uno de los escalares es no nulo, la familia F se denomina **ligada**.

*Ejercicio 14*

*Determinar todos los escalares c1, c2 y c3 tales que: c1 . (2,7,8) + c2 . (1,-1,3) + c3 . (3,6,1) = (0 ,0, 0).*

*Ejercicio 15*

*Determinar si las siguientes familias de vectores son libres o ligadas:*

1. *En IR2 (IR): *
2. *En IR2 (IR): *
3. *En IR3 (IR): *
4. *En IR3 (IR): *

Vectores linealmente dependientes e independientes

Un conjunto de vectores {v1,...,vn} se dice que es **linealmente independiente** si la única combinación lineal nula de ellos es la trivial, es decir, si siempre que se tenga:  = k1 u1 + k2 u2 + ... + km um, entonces ki = 0 para cada i. En caso contrario, se dice que son **linealmente dependientes**.

Los vectores de una familia libre son linealmente independientes, esto significa que ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores de la familia. Los vectores de una familia ligada son linealmente dependientes.

*Ejercicio 16*

*Colocar V o F según corresponda:*

1. *Una familia ligada posee todos sus vectores linealmente independientes.*
2. *Si el vector nulo pertenece a una familia de vectores, entonces es una familia ligada.*
3. *Dada una familia de vectores linealmente independientes, entonces se puede afirmar que todos se pueden expresar como combinación lineal de los demás vectores de la familia.*

**Parte B:**

* **Norma o módulo de un vector y sus propiedades**

Existe una función que asigna a cada vector u de IRn , un número real, verificando ciertas condiciones. Esa función recibe el nombre de norma o módulo del vector:

|| || : IRn → IR

u → || u ||

Condiciones:

Siendo u y v vectores de IRn y t un escalar real:

* || u || ≥ 0 ∧ ( || u || = 0 ⇔ u = 0 )
* || t. u || = | t | . || u ||
* || u + v || ≤ || u || + || v || ( Desigualdad triangular)

Norma usual

Considerando IR2 y IR3 , que serán los espacios vectoriales que se abordarán durante este curso, se define la norma o módulo usual de la siguiente manera:

Si u = ( x, y ) de IR2 , || u ||= + 

Si u = ( x, y, z ) de IR3 , || u ||= + 

*Ejercicio 17*

*Sean los vectores u = ( -2, 3) y v = (-3,5 ) de IR2, verificar que:*

1. *|| u || ≥ 0*
2. *|| -5. v || = | -5 | . || v ||*
3. *|| u + v || ≤ || u || + || v ||*

*Ejercicio 18*

1. *Sea u = (1, k, 0) un vector de IR3. Hallar todos los valores de k ∈ IR tales que || u || = 2.*

*b)Sea w = k.(2,2,1) un vector de IR3. Hallar todos los valores de k ∈ IR tales que || w || = 1.*

Vectores normados:

Se denominan vectores normados o unitarios, a aquellos cuya norma o módulo es igual a uno, es decir u es un vector normado si || u || = 1.

Si un vector v no nulo, tiene norma distinta de uno, es posible encontrar a partir de v un vector normado. Para ello es suficiente con multiplicar al vector v por el número real inverso de su norma o módulo, es decir:

v ≠ 0 y || v || ≠ 1, el vector w = es normado

*Ejercicio 19*

*Normalizar el vector  en los siguientes casos:*

*a)* *y* 

*b) y b= ( 2,-4,5)*

*Ejercicio 20*

*Hallar el perímetro del triángulo determinado por los puntos: a= (-2, 0, -1), b = (-2, -1, 3) y*

*c = (-1, 1, 1) de IR3. Clasifica dicho triángulo según la medida de sus lados.*

* **Producto interior o escalar y sus propiedades**

Existe una función tal que a cada par de vectores de IRn, le asigna un número real, cumpliendo ciertos requisitos, esta función recibe el nombre de producto escalar o producto punto.

• : IRn x IRn → IR

(u, v) → u • v

Condiciones:

Para todo u, para todo v y para todo w del espacio IRn , y para cualquier t de IR:

u • u ≥ 0 ∧ (u • u = 0 ⇔ u = 0 )

u • v = v • u

u • (v + w ) = u • v + u • w

t. (u • v) = u • (t . v)

Producto escalar usual o euclideo

Considerando IR2 y IR3 ,el producto escalar usual se determina de la siguiente manera:

Si u = (x1, y1) de IR2  y v = (x2, y2) de IR2 u • v = x1.x2 + y1.y2

Si u = (x1, y1, z1) de IR3  y v = (x2, y2,z2) de IR3 u • v = x1.x2 + y1.y2 + z1.z2

Sea u de IRn, se verifica que: || u || 2 = u • u , es decir || u || = +

Si u = ( x, y ) de IR2 , || u || = += + 

Si u = ( x, y, z ) de IR3 , || u ||= += + 

*Ejercicio 21*

*Sean los vectores u = ( 1, 2) , v = (4, -2) y w = ( 6,0) de IR2 . Determinar:*

1. *u • ( 7 v+ w)*
2. *|| ( u • w) w ||*
3. *|| u || ( v • w)*
4. *( || u || v) • w*

Vectores ortogonales

Si el producto escalar entre dos vectores es cero, se dice que esos vectores son ortogonales:

**u • v = 0 ⇔ u ⊥ v**

Si alguno de ellos fuera el vector nulo, el producto escalar indefectiblemente es cero, lo que indica que el vector nulo es ortogonal a cualquier otro vector.

* **Ángulo entre vectores**

Dados dos vectores u y v de IRn , distintos del vector nulo, definimos el ángulo determinado por u y v, como el único ángulo ϕ obtenido: ϕ = arccos ( )

Es decir: **u • v = || u || . || v || . cos ϕ**

*u*

ϕ

v

* **Distancia entre vectores en función de la norma**

Sean dos vectores u y v de IRn , se define la distancia entre u y v, y se anota d(u, v):

**d(u, v) = II u-v II = II v-u II**

Si u = (x1, y1) de IR2  y v = (x2, y2) de IR2

d(u, v) = += +

Si u = (x1, y1, z1) de IR3  y v = (x2, y2,z2) de IR3

d( u, v ) = += +

*Ejercicio 22*

*Determinar la amplitud de los ángulos interiores y la longitud de los lados de un cuadrilátero abcd si se sabe que: a = (-2, 2), b = (-2, 7), c = (3, 7) y d = (3, 2).*

1. *¿Es abcd un rectángulo? Justificar analíticamente tu respuesta.*
2. *Calcular su área y la longitud de las diagonales.*

*Ejercicio 23*

*Dado el triángulo , donde a = (2, 1), b = (3, 3) y c = (4, 1), determinar la amplitud de sus ángulos interiores.*

* **Producto cruz o vectorial de vectores del espacio tridimensional y sus propiedades**

Entre los vectores del espacio real IR3 ,existe una función denominada producto vectorial, que asigna a cada par de vectores un único vector que es ortogonal a ambos.

x : IR3 x IR3 → IR3

(u, v) → u x v

Determinación de las componentes del vector u x v:

Si u = (u1, u2, u3) de IR3  y v = (v1, v2,v3) de IR3

**w = uxv = ( u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2-u2v1 )**

o con la notación de determinantes:

w = uxv= ()

La recta sostén del vector u x v es perpendicular al plano que determinan u y v.

El sentido del vector u x v se determina a partir de la regla de la mano derecha, una representación gráfica de la situación es la siguiente:

v

u x v



v



u u

v x u

Propiedades del producto vectorial:

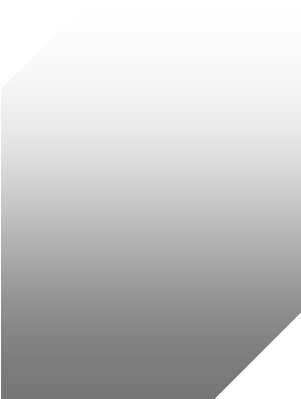
* u x v = - ( v x u)
* u x(v+w)= ( u x v)+(u x w)
* (u+v) x w=(u x w)+(v x w)
* K(u x v)=(ku) x v=u x (kv)
* u x O=O x u=O
* u x u=O

*Ejercicio 24*

*Halle un vector de dirección perpendicular a u = (-1, 1, 5) y v = (6, 0, 3), usando producto vectorial.*

* **Producto mixto**

El producto mixto entre vectores de IR3 es el número real que se obtiene a través de la siguiente expresión:  **u • ( v x w ) = ( u x v ) • w**



w

v u

Si u = (u1, u2, u3) de IR3  , v = (v1, v2,v3) de IR3 y w = (w1, w2, w3) de IR3

## 

## u • ( v x w ) = u1.(v2.w3 – w2.v3) + u2.( v3.w1 – w3.v1) + u3. (v1.w2 – w1.v2)

Este número real obtenido, representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores u, v y w.

*Ejercicio 25*

*Calcular el volumen del paralelepípedo que determinan en IR3 los puntos: a = (3, 0, 2), b = (3, 2, 5), c = (5, 4, 2) y d = (4, 0, 1).*

Teorema

***Si u y v son vectores de IR3, entonces:***

1. ***u• (u x v) = 0 ( u x v es ortogonal a u)***
2. ***v• (u x v) = 0 ( uxv es ortogonal a v)***
3. ***II u x v II 2 = II u II2 II v II2 – ( u • v)2 ( Identidad de Lagrange)***

Demostración

Sean u = (u1, u2, u3) de IR3  y v = (v1, v2,v3) de IR3

u x v = (u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2- u2v1)

Por a)

u•(u x v)= (u1, u2, u3)• (u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2- u2v1) = u1(u2v3-u3v2) + u2 (u3v1-u1v3) + u3 ( u1v2- u2v1) = 0

Recordando que || u || 2 = u • u

II u x v II 2 = (u x v) • (u x v) = (u2v3-u3v2)2 + ( u3v1-u1v3)2 + ( u1v2- u2v1)2

Además

II u II2 . II v II2 – ( u • v)2 = ( u12+ u22+ u32) ( v12+ v22 + v32) – ( u1v1 +u2v2 + u3 v3)2

Al efectuar los productos y por propiedad distributiva, se puede llegar a la identidad de Lagrange

**II uxv II 2 = II u II2 II v II2 – (u • v)2**

La identidad de Lagrange, tiene una aplicación geométrica muy útil, ya que se puede demostrar que la norma o modulo del vector uXv coincide con el área del paralelogramo que determinan los vectores u y v.

v



u

Si ϕ denota el ángulo entre los vectores u y v, entonces u • v = || u || . || v || . cos ϕ , de modo que reemplazando en la identidad de Lagrange:

II uxv II 2 = II u II2 II v II2 – (u • v)2

II uxv II 2 = IIuII2 IIvII2 – ( || u || . || v || . cos ϕ )2

II uxv II 2 = IIuII2 IIvII2 – || u ||2 . || v ||2 . cos2 ϕ

II uxv II 2 = IIuII2 IIvII2 ( 1 - cos2 ϕ)

II uxv II 2 = IIuII2 IIvII2 sen2 ϕ

Por lo tanto:

**II uxv II = II u II .II v II sen ϕ**

En la figura anterior la medida de la altura del paralelogramo determinado por u y v, está dada por: **II v II senϕ,**  por consiguiente el área de dicha figura es:

**Area = II u II .II v II .sen ϕ = II uxv II**

*Ejercicio 26*

*Hallar el área del triángulo determinado por los puntos: a = (-2, 0, -1), b = (-2, -1, 3) y c = (-1, 1, 1) en IR3.*

* **Referencias**

Espacio afín

Si a cada par de elementos de un conjunto E siempre es posible identificarlo con un único vector, entonces ese conjunto es un **espacio afín**. A los elementos del espacio afín E se los denomina **puntos**.

Por ejemplo: A cada par de puntos del plano le corresponde un único vector del plano, por ello es un espacio afín denominado E2.

|  |
| --- |
| →  (a, b) → *ab*    →  (o, m) → *om* |

IR

a

•

•

b

o

•

•

m IR

De similar manera, a cada terna de puntos le corresponde un único vector del espacio, por ello es un espacio afín denominado E3.

Referencias

Es suficiente con conocer tres puntos no alineados de un plano afín E2 para determinar una **referencia afín** en el plano.

Sean los puntos m, n, p no alineados del plano afín E2, se define la referencia afín *R* del plano como:

*R* = {m, n, p}

Con estos puntos se pueden determinar los vectores: ** y ** que son linealmente independientes.

*n*

m p

El punto m se denomina origen de la referencia y los vectores *y * determinan l*a* **referencia cartesiana** *R* = {m, *,}.*

En el plano IR2 una **referencia natural** o **referencia cartesiana ortonormada** *R* = { o,,}, está dada por un punto y dos vectores linealmente independientes, que usualmente se anotan ** y *,* tales que sean normados ( IIII = 1 y IIII = 1)y ortogonales (***•*** = 0).

IR

** IR

*o *

Los vectores ** y **se denominan versores*.* Las referencias naturales permiten expresar a los puntos a través de lo que se llama sus coordenadas rectangulares.

*Ejercicio 27*

*Sean los puntos a= (-2, 3) , b= ( 0, -4) y c = ( -1, 3) de IR2, analizar si determinan una referencia natural para dicho espacio.*

Es suficiente con conocer cuatro puntos no alineados de un plano afín E3 para determinar una **referencia afín** en el espacio.

Sean los puntos m, n, p y q del espacio afín E3, se define la referencia afín *R* del espacio como:

*R* = {m, n, p, q}

Con estos puntos se pueden determinar los vectores: **, * y * que son linealmente independientes.

*n*

q m p

El punto m se denomina origen de la referencia y los vectores *,  y * determinan l*a* **referencia cartesiana** *R* = {m, *, ,}.*

En el espacio IR3 una **referencia natural** o **referencia cartesiana ortonormada** *R* = { o,,,}, está dada por un punto y tres vectores linealmente independientes, que usualmente se anotan *,*  y*,* tales que sean normados ( IIII = 1 y IIII = 1 y IIII =1 )y ortogonales dos a dos (***•*** = 0, ***•*** = 0, ***•*** = 0).

 o  IR



IR

IR

Los vectores ** , ** y se denominan versores*.* Las referencias naturales permiten expresar a los puntos a través de lo que se llama sus coordenadas rectangulares.

*Ejercicio 28*

*Sean los puntos a= (-1, -2, 3), b= ( 5, 0, -4) , c = (7, -1, 3) y d= (-2, 4, 0) de IR3, analizar si determinan una referencia cartesiana ortonormada para dicho espacio.*

* **Cambio de referencias**

1º caso

Dada una referencia *R* es posible cambiar su origen **o** a otro punto **o’**. En ese caso se realiza un cambio de referencia que tiene en cuenta esta situación, de tal forma que, si se dispone de las coordenadas de un punto **a** de IR2 o de IR3 en la referencia *R*, se podrán determinar las coordenadas del mismo punto **a** en la nueva referencia *R*’.

y y’ a

o’ x’

o

x

Si en la referencia *R*, el punto **o’** tiene coordenadas **o’** = (x0 , y0 ) en el plano y **o’** = (x0 , y0 , z0 ) en el espacio.

El punto **a** en la referencia *R*  tiene coordenadas: **a** = (x, y) en el plano o bien **a** = (x, y, z) en el espacio; en la referencia *R’* sus coordenadas serán **a** = (x’, y’) en el plano o bien **a** = (x’, y’, z’) en el espacio y se obtienen a partir de las expresiones:

 en el plano  en el espacio

*Ejercicio 29*

*En el espacio IR3, se conocen las coordenadas de los puntos: a = (-2, 0, 4), b = (-2, 6, 4 ) y c = (2, 0, 2), en la referencia natural, que corresponden a los vértices del triángulo .Hallar las nuevas coordenadas de los vértices del triángulo  si el origen se traslada al punto o’= (-1, 2,-3).*

2º caso

Si se dispone de una referencia *R* cartesiana ortonormada en el plano, respecto de un origen **o**, es posible determinar las coordenadas de un punto **a** en una nueva referencia *R’*, también ortonormada, sabiendo que el sistema de ejes ha rotado un determinado ángulo orientado β (medido en sentido positivo).

a

y

o’

y’ x’

β

o x

El punto **a** en la referencia *R*  tiene coordenadas: **a** = (x, y), en la referencia *R’* sus coordenadas serán **a** = (x’, y’) y se obtienen a partir de la expresión:



*Ejercicio 30*

*En el plano IR2 se tienen las coordenadas de los puntos extremos del segmento , siendo a= (-1,2) y b = ( 4,-7), respecto de la referencia natural. Determinar las coordenadas de los puntos extremos del segmento si los ejes cartesianos han girado un ángulo de 30º en sentido antihorario. Representar gráficamente.*

3º caso

Si además de conocer el ángulo de giro de los sistemas de referencia cartesianos ortonormados del plano, se sabe que también se produce un desplazamiento del origen **o** hacia el punto **o’**, entonces para determinar las coordenadas de un punto **m** en la nueva referencia hay que considerar ambas situaciones.

IR

y

**m**

•

α

y’

α

x’

o’

IR

o x

Si en la referencia *R*, el punto **o’** tiene coordenadas **o’** = (x0 , y0 ) y el punto **m** = (x, y), en la referencia *R’* sus nuevas coordenadas serán **m** = (x’, y’) y se obtienen a partir de la expresión:



*Ejercicio 31*

*En el espacio afín IR2, se tienen las coordenadas del punto m = (2, -2) dadas en la referencia usual  , además se conocen las coordenadas del punto o’ = (1, 1), y los ejes rotan un ángulo  en sentido antihorario. Encontrar las coordenadas del punto m en la referencia  Representar gráficamente.*